Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Mathématiques, Algèbre 3, 2020-2021

Cycle Préparatoire-Semestre 3

Série $n°$ 1 : Espaces préhilbertiens et euclidiens
Pr. A. Majdoubi

Exercice 1
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. Montrer que l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\langle f|g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$$

est un produit scalaire.

Exercice 2
Soient $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace euclidien, a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\varphi : (x, y) \longmapsto \langle x|y\rangle + k\,\langle x|a\rangle\,\langle y|a\rangle.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 3
Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients tous positifs, et pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$\big(P(\sqrt{x\,y})\big)^2 \leq P(x)\,P(y).$$

Exercice 4
1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que $tr\,A = tr({}^tA)$, que $tr(AB) = tr(BA)$ et que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A,B) = Tr({}^tAB).$$

   Montrez que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que $|tr\,A| \leq \sqrt{n\,Tr({}^tA\,A)}$. Quand a-t-on l'egalite ?

Exercice 5
Soient E,F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels dont chacun est muni d'un produit scalaire, $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ les normes associées, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x, y) \in E^2,\quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E.$$

1. Montrer que : $\quad \forall x \in E,\quad \|f(x)\|_F = \|x\|_E.$
2. Montrer que : $\quad \forall (x, y) \in E^2,\quad \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle.$
3. En déduire que f est linéaire.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que :

$$\forall x \in E,\quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle^2.$$

1. montre que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthogonale.
2. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 7
Orthonormaliser la base suivante de $\mathbb{R}^4$ (pour le produit scalaire habituel) :

$$u_1 = (0,1,1,1),\ u_2 = (1,0,1,1),\ u_3 = (1,1,0,1),\ u_4 = (1,1,1,0)$$

Exercice 8

1. Montrer que l'application ϕ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \longmapsto (x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_2y_2+(x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser pour ce produit scalaire la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Calculer, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $\varphi(X^i, X^j)$.
   (b) En déduire une base orthonormale de E.

Exercice 10
Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire :

$$(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

Exercice 11
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

1. Déterminer la projection orthogonale sur F.
2. Calculer la distance $d(u,F)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ au sous-espace F.

Exercice 12
On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\}$ où a_1,a_2,a_3 sont des réels donnés non tous nuls.

1. Déterminer l'orthogonal de H.
2. Trouver une base orthonormée de H.

Exercice 13
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3 | b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3) = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E;\ P(1)=0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Mathématiques, Algèbre 3, 2020-2021

Cycle Préparatoire-Semestre 3

Série $n^\circ 2$: Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien
Pr. A. Majdoubi

Exercice 1
Soit $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & c \\ a & \sqrt{2} & d \\ \sqrt{3} & b & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $M \in O_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $M \in SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2
Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice orthogonale. Démontrer que :

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = n \ , \quad \left| \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} \right| \le n \quad \text{et} \quad n \le \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \le n\sqrt{n}.$$

Exercice 3
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que φ est une symétrie orthogonale.

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i,j)$. Étudier l'endomorphisme $u \in L(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i,j,k)$. Étudier l'endomorphisme $u \in L(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$.

Exercice 7
Diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes avec une matrice de passage orthogonale.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$